Μάθημα 1º 22/02/18

Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι (εισαγωγή στη μιγ. ανάλυση)

Το βιβλίο του Χαρακώστα
Σημειώσεις Γιαννούλη
Serge Lang, Complex Analysis

§ Μιγαδικοί Αριθμοί

1) Ως γνωστόν η εξίσωση $x^2=2$ ΔΕΝ έχει λύση στο $\mathbb{Q}$. Το πρόβλημα αυτό το λύσαμε επεκτείνοντας το σύστημα των ρητών $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ στο σώμα των πραγματικών $(\mathbb{R},+,\cdot)$

2) Εδώ έχουμε το εξής πρόβλημα: Θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $x^2=-1$. Διαπιστώνουμε ότι αυτή δεν έχει λύση στο $(\mathbb{R},+,\cdot)$

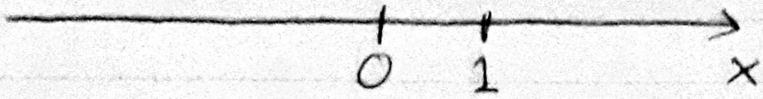
Πως θα λύσουμε αυτό το πρόβλημα;;
Θέλουμε να επεκτείνουμε το σώμα των πραγματικών $(\mathbb{R},+,\cdot)$ σε ένα όσο γίνεται πιο μικρό σώμα

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ το οποίο θα ονομάζουμε σώμα των μιγαδικών αριθμών, δηλ: $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ και αν $x,y\in\mathbb{R}$ θα πρέπει η πρόσθεση και ο πολ/μος $x+_{\mathbb{R}}y$, $x\cdot_{\mathbb{R}}y$ να βγάζει τα ίδια αποτελέσματα με τις πράξεις $x+_{\mathbb{C}}y$, $x\cdot_{\mathbb{C}}y$ και το οποίο θα περιέχει έναν

αριθμό $i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, την φανταστική μονάδα

όπου $i^2=-1$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ | Το $\mathbb{R}$ μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά μέσω της πραγματικής ευθείας



Αποδεικνύεται ότι <u>η ελάχιστη αυτή επέκταση</u> σε ένα σώμα $(\mathbb{C},+,\cdot)$ του σώματος $(\mathbb{R},+,\cdot)$ που θα περιέχει τουλάχιστον ένα $i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ με $i^2=-1$ και θα διατηρεί στο $\mathbb{C}$ τις ιδιότητες των πράξεων στο $\mathbb{R}$. Η ελάχιστη αυτή επέκταση είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ διάστασης $=2$ και με διανύσματα βάσης που αντιστοιχούν στην πραγματική μονάδα $1\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

<u>Γι' αυτό το λόγο</u>, αντιστοιχούμε <u>1-1 και επί</u> το $\mathbb{C}$ με το $\mathbb{R}^2$ όπου το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης $0\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ αντιστοιχεί με το $(0,0)\in\mathbb{R}^2$

δηλ. $\mathbb{C}\supset\mathbb{R}\ni 0=(0,0)\in\mathbb{R}^2$

η πραγματική μονάδα $1\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ αντιστοιχεί με το $(1,0)\in\mathbb{R}^2$

$\mathbb{C}\supset\mathbb{R}\ni 1=(1,0)\in\mathbb{R}^2$

η φανταστική μονάδα $i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ αντιστοιχεί με το $(0,1)\in\mathbb{R}^2$

Οι πραγματικοί αριθμοί $x\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ αντιστοιχούν στα $(x,0)\in\mathbb{R}^2$

$\mathbb{C}\supset\mathbb{R}\ni x=(x,0)=x(1,0)=x(1,0)+0(0,1)=x\cdot 1+0i$

και (ΒΑΣΙΚΟ) κάθε μιγαδικός αριθμός $z\in\mathbb{C}$ αντιστοιχεί μοναδικά σε ένα διάνυσμα $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ μέσω της λεγόμενης Αλγεβρικής παράστασης ή μορφής

$$\mathbb{C} \ni z = \underbrace{(x,y)}\in \mathbb{R}^2$$

$$= x\underbrace{(1,0)}_{=1} + y\underbrace{(0,1)}_{=i}$$

$$= \boxed{x+yi\ ,\ x,y \in \mathbb{R}}$$

Και η πράξη της πρόσθεσης $+ : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ορίζεται μέσω της πρόσθεσης στον $\mathbb{R}^2$, δηλαδή, για δύο μιγαδικούς $\mathbb{C}\ni z_1 = \underbrace{(x_1,y_1)}\in\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{C}\ni z_2=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$

$$= x_1\underbrace{(1,0)}_{=1} + y_1\underbrace{(0,1)}_{=i}$$ ορίζουμε το άθροισμα ως

$$z_1+z_2 = (x_1,y_1)+(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$$

$$= (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

$$= (x_1+x_2) + (y_1+y_2)i$$, δλδ έχουμε

$$z_1+z_2 = (x_1+y_1 i) + (x_2+y_2 i) = (x_1+x_2) + (y_1+y_2)i$$

Με αυτή την πρόσθεση το $(\mathbb{C},+)$ είναι μεταθετική ομάδα με ουδ. στοιχείο το $0\in\mathbb{C}$ (δηλ $(0,0)\in\mathbb{R}^2$) δηλ ισχύουν

$$z_1+(z_2+z_3) = (z_1+z_2)+z_3$$
$$z_1+z_2 = z_2+z_1$$
$$z+0 = z$$
$$-z+z = 0$$

Παρατήρηση 1) Οι ιδιότητες αυτές είναι και ο λόγος που γράφουμε για $z_1 = x_1+y_1 i$, $z_2 = x_2+y_2 i$

$$z_1+z_2 = (x_1+y_1 i) + (x_2+y_2 i) \underset{\text{αντιμετ. κ.ο.κ.}}{\overset{\text{με την}}{=}} x_1(1,0)+y_1(0,1)$$

$$= x_1+y_1 i + x_2+y_2 i = x_1+x_2+y_1 i+y_2 i = x_1+x_2+(y_1+y_2)i$$

Για να γίνει το $(\mathbb{C},+)$ <u>σώμα</u> πρέπει να έχουμε και έναν πολ/σμο $\bullet : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, με τον οποίο μαζί με την πρόσθεση θα μπορούμε να κάνουμε πράξεις, όπως ξέρουμε και από το $\mathbb{R}$, και θέλουμε να ισχύει $i^2 = i\cdot i = -1$

(και οι πράξεις να επεκτείνουν τις πράξεις στο $\mathbb{R}$)

$$z_1\cdot z_2 = (x_1+y_1 i)(x_2+y_2 i) = x_1(x_2+y_2 i) + y_1 i(x_2+y_2 i) =$$

$$= x_1x_2 + x_1y_2 i + x_2y_1 i - y_1y_2 = \underbrace{x_1x_2 - y_1y_2}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}_{\in\mathbb{R}} i$$

Συνεπώς, ορίζουμε ως πολ/σμο $\bullet\ \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ για τα $z_1 = x_1+y_1 i = (x_1,y_1)$ και $z_2 = x_2+y_2 i = (x_2,y_2)$ το γινόμενο $z_1z_2 = (x_1+y_1i)(x_2+y_2i) = (x_1x_2-y_1y_2) + (x_1y_1-x_2y_1)i$

Αφού ορίσαμε τον πολ/σμό στο $\mathbb{C}$ όπως πιο πάνω διαπιστώνουμε ότι αυτός κάνει τους μη-μιγ. αριθμούς $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\bullet)$ να είναι μεταθετική ομάδα με ουδέτερο το $1\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

$\overset{\shortparallel}{(1,0)\in\mathbb{R}^2}$

δηλ. ισχύουν: (α) $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$

(β) $z_1z_2 = z_2z_1$

(γ) Το $1\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ είναι ουδέτερο στοιχείο:

$$1z = (1+0i)(x+yi) = (1\cdot x - 0y) + (1\cdot y + 0x)i =$$

$$= x+yi = z$$

δ) $\forall\ z = x+yi \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\exists!$ αντίστροφος

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)i$$

⊛ $z = (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$\Rightarrow x^2+y^2>0$ αφού για $w = a+bi\in\mathbb{C}$ θέλουμε

$$zw = 1 \iff \underbrace{(x+yi)(a+bi)}_{(xa-yb)+(xb+ya)i} = 1+0i$$

$$(xa-yb)+(xb+ya)i = (xa-yb,\ xb+ya)$$